Introducere în Combinatorică

Iulian Oleniuc

1 Elemente de bază

Combinatorica este ramura matematicii care se ocupă în principal de studiul mulțumilor finite și de numărarea modurilor în care putem construi diverse configurații peste aceste mulțimi.

1.1 Regula sumei

Dacă avem două mulțimi disjuncte A și B, cu m și respectiv n elemente, numărul de moduri de a alege un element din A sau din B este $m + n$. Cu alte cuvinte, reuniunea mulțimilor A și B are $m + n$ elemente.

1.2 Regula produsului

Dacă avem două mulțimi A și B, cu m și respectiv n elemente, numărul de moduri de a alege un element din A și unul din B este $m \cdot n$. Cu alte cuvinte, produsul cartezian al mulțimilor A și B are $m \cdot n$ elemente.

1.3 Permutări

Din punct de vedere combinatorial, o permutare a unei mulțimi reprezintă o modalitate de a aranja secvențial elementele acesteia. De exemplu, permutările mulțimii $A = \{1, 2, 3\}$ sunt:

$$
\begin{gathered}
(1, 2, 3) \\
(1, 3, 2) \\
(2, 1, 3) \\
(2, 3, 1) \\
(3, 1, 2) \\
(3, 2, 1)
\end{gathered}
$$

Permutările unei mulțimi A pot fi privite de asemenea drept totalitatea funcțiilor *bijective* definite pe A, cu valori în A.

Numărul permutărilor de ordin n (permutările unei mulțimi A cu n elemente) se notează cu P_n și este egal cu $n!$. Această relație poate fi demonstrată în mai multe moduri. Să analizăm două dintre ele:

Metoda constructivă

Atunci când dorim să construim o permutare de ordin n, pe prima poziție putem pune orice valoare de la 1 la n, deci avem n variante. Pentru a doua poziție, ne-au rămas $n-1$ variante, pentru că una dintre valori a fost deja folosită de prima poziție. Pentru a treia poziție, am rămas cu $n-2$ variante, pentru că deja am folosit două elemente pentru primele două poziții. Generalizând raționamentul, pentru poziția i ($1 \leq i \leq n$) avem $n-i+1$ variante rămase. Aplicând regula produsului, obținem

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 = n!.$$

Metoda inductivă

Dacă avem deja o permutare de ordin $n-1$ și vrem să obținem din aceasta una de ordin n, nu avem decât să inserăm undeva în ea valoarea n. Aceasta poate fi inserată fie înainte de o poziție i, cu $1 \leq i < n$, fie după ultima poziție. În total avem n poziții posibile pentru noul element. Conform regulii produsului, obținem $P_n = n \cdot P_{n-1}$, de unde $P_n = n!$.

1.4 Permutări cu repetiție

Când vine vorba să numărăm permutările unui șir ale cărui elemente nu sunt neapărat distincte, formula clasică de la permutări nu mai funcționează.

De exemplu, pe o permutare de genul $\langle 1, 3, 2, 3 \rangle$ am număra-o de două ori, ca și cum cei doi de 3 ar fi numere diferite — prima oară cu primul 3 pe poziția 2 și al doilea 3 pe poziția 4, iar a doua oară cu primul 3 pe poziția 4 și al doilea 3 pe poziția 2.

Deci, dacă notăm cu $f(i)$ frecvența numărului i în permutare, atunci, pentru fiecare i din șirul a, am numărat de $P_{f(i)}$ ori mai multe permutări decât trebuia. Așadar, formula pentru numărul de permutări cu repetiție ale unui șir a, de lungime n, cu elementele mai mici sau egale cu n, este

$$P_R(n) = \frac{n!}{f(1)! \cdot f(2)! \cdot f(3)! \cdots f(n)!}.$$

1.5 Aranjamente

Pentru o mulțime A, de cardinal n, un aranjament de n elemente luate câte k reprezintă o submulțime ordonată a lui A de k elemente. De exemplu, aranjamentele de 3 luate câte 2 ale mulțimii $A = \{1, 2, 3\}$ sunt:

$$(1, 2)$$
$$(1, 3)$$
$$(2, 1)$$
$$(2, 3)$$
$$(3, 1)$$
$$(3, 2)$$

Similar permutărilor, aranjamentele pot fi considerate funcții *injective* definite pe mulțimea $\{1, 2, \ldots, k\}$ cu valori în $\{1, 2, \ldots, n\}$. Semnificația expresiei $f(x) = y$ este că elementul de pe poziția x din aranjament este egal cu y. Cred că deja e clar că permutările sunt un caz particular de aranjamente: Permutările de ordin n sunt aranjamente de n luate câte n.

Numărul aranjamentelor de n luate câte k se notează cu A_n^k și este egal cu $\frac{n!}{(n-k)!}$. Din nou, putem demonstra această relație în două moduri:

Metoda constructivă

Atunci când construim un aranjament de n elemente luate câte k, pe prima poziție putem pune orice valoare, deci avem n variante. Pe a doua poziție putem pune orice valoare, mai puțin cea pe care deja am folosit-o, deci am rămas cu $n - 1$ variante. Generalizând, obținem

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Metoda bazată pe permutări

Putem construi aranjamentele de n elemente luate câte k pornind de la permutările de ordin n. Pentru asta, este de ajuns să ștergem ultimele $n - k$ elemente din fiecare permutare, însă nu vom rămâne cu aranjamente distincte. De exemplu, dacă $n = 5$ și $k = 2$, permutările care se transformă în aranjamentul $(3, 1)$ sunt:

$$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, 2, 4, 5)$$
$$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, 2, 5, 4)$$
$$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, 4, 2, 5)$$
$$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, 4, 5, 2)$$
$$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, 5, 2, 4)$$
$$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, 5, 4, 2)$$

Se observă ușor că numărul de permutări care generează un anumit aranjament este P_{n-k}, pentru că ultimele $n-k$ elemente ale lor pot fi aranjate în P_{n-k} moduri. Așadar, $A_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

2 Combinări

Combinările de n elemente luate câte k, ale mulțimii A de cardinal n, reprezintă submulțimile cu k elemente ale lui A. De remarcat că submulțimile nu sunt ordonate, ceea ce înseamnă că, în cazul combinărilor, submulțimile $\{1, 2, 3\}$ și $\{2, 3, 1\}$ *nu* sunt diferite. De exemplu, combinările de 4 luate câte 3 ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4\}$ sunt:

$$\{1, 2, 3\}$$
$$\{1, 2, 4\}$$
$$\{1, 3, 4\}$$
$$\{2, 3, 4\}$$

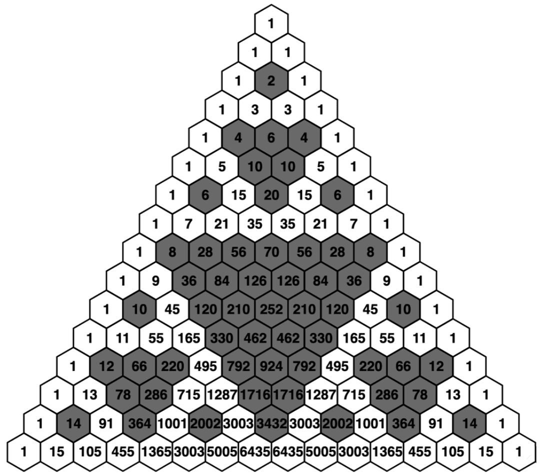
Numărul de combinări de n luate câte k se notează cu C_n^k și este egal cu $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Demonstrația este următoarea: Diferența dintre aranjamente și combinări este că aranjamentele sunt submulțimi *ordonate*. Prin urmare, o combinare de lungime k corespunde aranjamentelor de lungime k, formate permutând elementele respectivei combinări. Numărul acelor permutări este P_k, de unde $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Cum combinările numără submulțimile unei mulțimi în funcție de cardinalul lor, suma combinărilor de n luate câte k, cu $0 \leq k \leq n$, este egală cu numărul total de submulțimi ale unei mulțimi de cardinal n. Acesta este 2^n, deoarece pe fiecare element putem fie să-l luăm, fie să nu-l luăm în cadrul submulțimii, așa că pentru fiecare element avem două variante. Aplicând regula produsului, obținem $\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^n$.

2.1 Triunghiul lui Pascal

Triunghiul lui Pascal se referă la aranjamentul geometric pe care-l obținem când scriem pe fiecare linie $n \geq 0$ numerele C_n^k, unde k ia valori pe rând de la 0 la n.

Acest desen ne ajută să vizualizăm mai ușor diverse proprietăți ale combinărilor. Spre exemplu, colorând cu gri combinările pare, obținem Triunghiul lui Sierpinski, ceea ce am ilustrat și în desenul de mai jos.



Relația de complementariere

O altă observație este că $C_n^k = C_n^{n-k}$. Cu alte cuvinte, numărul de moduri în care putem alege k elemente dintre cele n este același cu numărul de moduri în care putem alege care să fie cele $n-k$ elemente *nealese*.

Relația de recurență

Poate cea mai importantă proprietate a combinărilor ce rezultă din Triunghiul lui Pascal este următoarea relație de recurență:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

Ea ne permite să precalculăm toate combinările până la linia n în $O(n^2)$ — complexitate, evident, optimă, fiind egală cu dimensiunea output-ului:

```
comb[0][0] = 1;
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    comb[i][0] = 1;
    for (int j = 1; j <= i; j++)
        comb[i][j] = comb[i - 1][j - 1] + comb[i - 1][j];
}
```

Intuiție: Fie mulțimile $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ și $B = \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Putem construi o combinare a lui A, de k elemente, adăugându-l pe n la o combinare de $k-1$ elemente a mulțimii B. Însă, nu toate combinările trebuie sa-l conțină pe n. Observăm că cele din urmă sunt combinări de k elemente ale lui B. Cum cele două tipuri de combinări menționate sunt numărate de C_{n-1}^{k-1} și respectiv de C_{n-1}^k, aplicând regula sumei, obținem recurența de mai sus.

2.2 Binomul lui Newton

Combinările se mai numesc *coeficienți binomiali*, deoarece se regăsesc drept coeficienți în descompunerea lui $(a+b)^n$ ($n \in \mathbb{N}$), numit *Binomul lui Newton*:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n a^0 b^n$$

Intuiție: Expandându-l pe $(a+b)^n$ drept

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{\text{de } n \text{ ori}},$$

observăm ușor că fiecare termen rezultat va avea forma $a^x b^y$, unde $x + y = n$. Cu alte cuvinte, pentru fiecare termen, x paranteze contribuie cu câte un a și $y = n - x$ cu câte un b. Câți termeni asemenea obținem pentru un x fixat? Un număr egal cu numărul de combinări de n luate câte x, adică C_n^x.

3 Stars and Bars

Stars and Bars reprezintă o metodă combinatorială de a calcula numărul de moduri în care putem plasa n bile *neetichetate* în k cutii etichetate $1, 2, \ldots, k$. Putem reformula problema în felul următor. Câte șiruri formate din $k-1$ bare și n stele există?

Cazul $c_i \geq 0$

Cele două probleme sunt echivalente în ideea că fiecare $\star$ reprezintă o bilă și fiecare $|$ delimitează două cutii consecutive.

$$\underbrace{\star\star\star\star\star\star\star\star\star}_{c_1=9} \mid \underbrace{\star\star\star\star\star}_{c_2=5} \mid \underbrace{\star\star\star\star\star\star\star}_{c_3=7}$$

Într-un astfel de șir, fiecare dintre cele $k-1$ bare se află pe o poziție din mulțimea $\{1, 2, \ldots, n+k-1\}$. Prin urmare, numărul șirurilor este C_{n+k-1}^{k-1}.

Cazul $c_i \geq 1$

Însă, acest model va număra și configurații precum

$$\mid \star \mid \star\star\star \mid\mid \star\star,$$

unde $c_1 = c_4 = 0$. Faptul că două bare pot fi alăturate, și de asemenea că o bară poate să apară la începutul sau la finalul șirului, ne permite să numărăm și configurații ce conțin cutii goale.

Dacă dorim să evităm asta, punem de la început câte o bilă în fiecare cutie, după care plasăm restul de $n-k$ bile în cele k cutii, dar de data asta *putând* avea cutii goale. Prin urmare, răspunsul devine $C_{n+k-1-k}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$.

4 Partițiile unui număr natural

O altă formulare celebră a acestei probleme este următoarea. În câte moduri putem scrie numărul $n \in \mathbb{N}^*$ ca sumă de k numere naturale nenule $c_1, c_2, \dots, c_k$? O astfel de configurație se numește *partiție ordonată* a lui n. Conform formulei de mai sus, răspunsul este C_{n-1}^{k-1}. Numărul *total* de partiții ale lui n este

$$C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \cdots + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}.$$

În contextul partițiilor *neordonate*, configurațiile $1 + 2 = 3$ și $2 + 1 = 3$ sunt echivalente. Calculul eficient al numărului *total* de partiții neordonate ale lui n necesită concepte avansate de combinatorică, așa că ne vom axa pe calculul celor de lungime fixată.

4.1 Numărul partițiilor neordonate de lungime dată

Observăm că o partiție de lungime k a lui n poate fi obținută în două moduri dintr-o partiție mai mică. Fie luăm o partiție de lungime $k - 1$ a lui $n - 1$ și adăugăm un 1 la începutul ei, fie luăm o partiție de lungime k a lui $n - k$ și adunăm 1 la toate elementele sale.

Putem obține orice configurație validă pornind de la $\varnothing$ printr-un șir de astfel de operații. De exemplu,

$$\varnothing \xrightarrow{+1} [1] \xrightarrow{+1} [1,1] \xrightarrow{++} [2,2] \xrightarrow{+1} [1,2,2] \xrightarrow{++} [2,3,3] \xrightarrow{++} [3,4,4].$$

Astfel, obținem recurența

$$p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k),$$

pentru $n, k \geq 1$. Cazurile de bază sunt $p(0,0) = 1$ și $p(n,0) = 0$ pentru $n \geq 1$.

5 Numerele lui Stirling de speța a II-a

Sunt folosite pentru a număra în câte moduri putem partiționa o mulțime de n elemente în k submulțimi, fiecare cu cel puțin un element. Spre exemplu, mulțimea $A = \{1, 2, \dots, 7\}$ poate fi partiționată în 3 submulțimi astfel:

$$A = \{1,2,5\} \cup \{3,7\} \cup \{4,6\}.$$

Notăm numărul căutat cu $S(n,k)$. Din nou, încercăm să formăm o configurație validă pornind de la una de dimensiuni mai mici. Mai exact, de la o partiție a lui $\{1, 2, \dots, n-1\}$.

Deducerea formulei

Dacă aceasta este formată din $k-1$ submulțimi, atunci adăugăm submulțimea $\{n\}$. Dacă în schimb este deja formată din k submulțimi, atunci îl adăugăm pe n la una dintre acestea. De exemplu, din partiția de mai sus putem obține partițiile:

$$\begin{aligned}
B_0 &= \{1,2,5\} \cup \{3,7\} \cup \{4,6\} \cup \{8\} \\
B_1 &= \{1,2,5,8\} \cup \{3,7\} \cup \{4,6\} \\
B_2 &= \{1,2,5\} \cup \{3,7,8\} \cup \{4,6\} \\
B_3 &= \{1,2,5\} \cup \{3,7\} \cup \{4,6,8\}
\end{aligned}$$

Astfel, obținem recurența

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k).$$

Cazurile de bază sunt $S(0,0)=1$ și $S(n,0)=S(0,k)=0$ pentru $n,k \geq 1$.

6 Principiul includerii și excluderii

Este folosit pentru a determina cardinalul reuniunii a n mulțimi. De exemplu, pentru $n=3$ avem

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| \\
- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\
+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.
\end{aligned}$$

6.1 Numărul perechilor de numere coprime

În general, principiul includerii și excluderii este folosit în probleme de divizibilitate. Cea mai clasică problemă de acest fel ne cere să determinăm câte perechi (a,b) cu $a,b \in \{1,2,\ldots,n\}$ există astfel încât a și b să fie prime între ele.

Pentru a calcula această valoare, vom scădea din numărul total de perechi, adică din n^2, numărul perechilor (a,b) cu gcd-ul mai mare decât 1. Întâi le vom scădea pe cele care îl au pe 2 ca divizor comun. Apoi le scădem pe cele care îl au pe $g=3$.

Observăm că perechile cu $g=4$ au fost numărate deja de cele cu $g=2$, așa că nu mai facem nimic. Continuăm cu $g=5$, pe care le scădem. Ajungem la $g=6=2\cdot 3$. Acest număr de perechi a fost scăzut de două ori — o dată pentru $g=2$ și o dată pentru $g=3$, așa că îl adunăm o dată.

În general, pentru $g = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$, dacă există vreun exponent e_i astfel încât $e_i > 1$, atunci nu facem nimic, deoarece am numărat perechile respective deja, pentru divizorul g/p_i. În schimb, în funcție de paritatea lui k, vom aduna sau scădea valoarea $f(g)$ din rezultat. Dacă k este impar scădem, iar dacă este par adunăm. Prin $f(g)$ am notat numărul de perechi (a,b) pentru care atât a cât și b sunt divizibile cu g. Avem $f(g) = \lfloor n/g \rfloor^2$.

7 Generarea celei de-a x-a combinări

Acesta este un exemplu clasic de problemă în care trebuie să construim eficient configurația de pe o anumită poziție dintr-un șir de configurații definite recursiv. Iterăm cu i fiecare element din mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ne uităm la combinările care încep cu i. Restul elementelor acestora vor fi alese din $\{i+1, i+2, \ldots, n\}$, deci numărul lor este C_{n-i}^{k-1}.

Dacă x este mai mare decât acesta, atunci scădem numărul din x și trecem la următorul i. Altfel, înseamnă că configurația căutată începe cu i, așa că generăm recursiv restul ei. Adică, generăm a x-a combinare de $n-i$ (din mulțimea $\{i+1, i+2, \ldots, n\}$) luate câte $k-1$.

8 Teme de gândire

Exercițiul 1. Demonstrați formula $C_n^k = C_n^{n-k}$ altfel decât în curs.

Exercițiul 2. Demonstrați formula $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ altfel decât în curs.

Exercițiul 3. Demonstrați formula $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \cdots + C_{k-1}^{k-1}$ în două moduri diferite. **Hint:** O metodă poate fi constructivă — gândiți-vă ce ne spune formula despre *structura* combinărilor de n luate câte k.

Exercițiul 4. Demonstrați formula de la Binomul lui Newton prin inducție matematică.

Exercițiul 5. Demonstrați formula $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$ folosind Binomul lui Newton. **Hint:** Alegeți niște valori convenabile pentru a și b.

Exercițiul 6. Demonstrați că $C_n^0 + C_n^2 + Cn^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + Cn^5 + \cdots$. **Hint:** Mai întâi, demonstrați că $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots = 0$, într-un mod similar cu cel de la exercițiul precedent.

Exercițiul 7. Cum putem calcula eficient $S(n, k)$ folosind principiul includerii și excluderii?

Exercițiul 8. Deduceți în mod constructiv formulele pentru numerele Stirling de speța I, Bell, Catalan și Narayana.

9 Probleme

Simplu

Problema 1. PM

Folosim programare dinamică. În acest sens, notăm cu $\mathrm{dp}[i][j]$ numărul de secvențe PM de lungime i care se termină în $j \in \{\texttt{+}, \texttt{-}\}$. Cum nu putem avea două minusuri consecutive, deducem că

$$\begin{aligned}\mathrm{dp}[i][\texttt{-}] &= \mathrm{dp}[i-1][\texttt{+}]\\ \mathrm{dp}[i][\texttt{+}] &= \mathrm{dp}[i-1][\texttt{-}] + \mathrm{dp}[i-1][\texttt{+}].\end{aligned}$$

Problema 2. Red

Putem proiecta o soluție de programare dinamică similară cu cea de mai sus, adăugând un parametru k care ne spune câte puncte au fost colorate în roșu până acum. Însă, ar fi mai interesantă o rezolvare combinatorială. Având de data aceasta k-ul fixat, putem reduce problema la Stars and Bars (varianta $c_i \geq 1$). Pentru aceasta, trebuie să transformăm cercul într-o linie, așa că vom fixa începutul acesteia în punctul 1.

Dacă punctul 1 este roșu, atunci, cum punctele 2 și n vor trebui să fie negre, am redus problema la instanța Stars and Bars cu parametrii $f(n-1, k-1)$. În schimb, dacă 1 este negru, atunci putem adăuga după punctul n o copie a lui 1. Acum, va trebui să colorăm cu roșu k puncte dintre cele $n+1$, astfel încât primul și ultimul să fie negre. Practic, instanța Stars and Bars corespunzătoare este $f(n+1, k)$.

Am notat $f(a, b) = (a-b, b+1)$, cu semnificația că un șir de stele și bare de lungime a, format din b bare, este echivalent cu plasarea a $a-b$ bile în $b+1$ cutii.

Problema 3. Albume

Ideea de bază este că, dacă probabilitatea ca o trupă i să fie ascultată este p, atunci numărul mediu de trupe i ascultate va fi tot p. De exemplu, dacă probabilitatea de a asculta măcar un album al trupei Wu-Tang este $1/3$, atunci, după ascultarea albumelor alese, numărul mediu de trupe Wu-Tang ascultate va fi $1/3$. Sună abstract, dar intuiția este că, în medie, ar trebui să repetăm de 3 ori experimentul pentru a asculta Wu-Tang o dată. Împărțind la 3, obținem că, pentru o singură repetare a experimentului, am ascultat $1/3$ trupe Wu-Tang.

Pentru a obține valoarea medie a numărului *total* de trupe ascultate, pur și simplu vom aduna probabilitățile ca fiecare trupă în parte să fie ascultată. Cum trupele nu diferă cu nimic între ele, aceste probabilități sunt egale. Pentru simplitate, vom calcula probabilitatea ca o anumită trupă să *nu* fie ascultată. Astfel, vom simula q alegeri de albume care nu aparțin trupei curente. La fiecare pas $i \geq 0$, probabilitatea p se va înmulți cu $(k(c-1)-i)/(kc-i)$. Răspunsul final va fi $c(1-p)$.

Problema 4. Two Round Dances

Trebuie să formăm două hore a câte $n/2$ persoane. Pentru a nu scădea mai târziu configurații numărate de mai multe ori, vom gândi așa: Fie x o persoană arbitrară dintre cele n. În câte moduri putem alege colegii de horă ai lui x? În $C_{n-1}^{n/2-1}$.

Urmează să permutăm persoanele din fiecare horă. Din nou, vorbind de un cerc, ar fi bine să-i fixăm începutul — fie acesta x. Observăm că ordinea celor doi vecini ai lui x nu contează. De exemplu, horele $\langle x, y, z, t\rangle$ și $\langle x, t, z, y\rangle$ sunt una și aceeași, căci dacă permutăm circular a doua horă cu o poziție la stânga o obținem pe prima în oglindă.

Vecinii lui x pot fi aleși în $C_{n/2-1}^2$ moduri. Prin urmare, numărul de permutări ale unei hore este $C_{n/2-1}^2(n/2-3)! = (n/2-1)!/2$. Așadar, răspunsul final al problemei este $C_{n-1}^{n/2-1}((n/2-1)!/2)^2$.

Mediu

Problema 5. Matrice5

Observăm că, dacă fixăm primele $m-1$ elemente de pe o anumită linie, atunci al m-lea va fi unic determinat modulo k. Mai precis, dacă notăm cu $l_i = a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,m-1}$, atunci obținem că $a_{im} \equiv -l_i \pmod k$. La fel și pentru coloane — fie c_i sumele corespunzătoare. Adunând relațiile de forma $a_{im} \equiv -l_i \pmod k$, precum și pe cele de forma $a_{ni} \equiv -c_i \pmod k$, obținem

$$\begin{aligned} a_{1,m} + a_{2,m} + \cdots + a_{n-1,m} &\equiv -(l_1 + l_2 + \cdots + l_{n-1}) \pmod k \\ a_{n,1} + a_{n,2} + \cdots + a_{n,m-1} &\equiv -(c_1 + c_2 + \cdots + c_{m-1}) \pmod k. \end{aligned}$$

Dar, cele două sume din dreapta sunt egale, deoarece însumează aceleași elemente din matrice. Prin urmare, și sumele din stânga, să le notăm s_c și respectiv s_l, sunt egale. Ei bine, pentru a satisface coloana m, elementul a_{nm} ar trebui să fie egal cu $-s_c \bmod k$, iar pentru a satisface linia n, ar trebui să avem $a_{nm} = -s_l \bmod k$. Dar tocmai am arătat că $s_l = s_c$. În concluzie, oricum am alege elementele din submatricea cu colțul stânga-sus în $(1,1)$ și colțul dreapta-jos în $(n-1, m-1)$, toate elementele de pe ultima linie și ultima coloană, inclusiv a_{nm}, vor fi unic determinate modulo k. De aici, formula finală poate fi găsită ușor.

Problema 6. Șirul2

Grupând termenii șirului după valoarea lor, prima cerință se reduce la Stars and Bars. Pentru a doua cerință, folosim programare dinamică astfel: Notăm cu $\text{dp}[i]$ numărul de șiruri corecte de lungime i. Nici nu este nevoie de un parametru pentru numărul de repetări ale ultimei valori! Întâi numărăm șirurile formate adăugând un nou element la cele de lungime $i-1$. Dacă acestea se termină în x, noul element poate fi x sau $x+1$, deci numărul de șiruri este $2 \cdot \text{dp}[i-1]$. Dintre acestea, trebuie să le dăm la o parte pe cele în care ultimul element se repetă de $r+1$ ori. Numărul lor este dat de $\mathrm{dp}[i-(r+1)]$, aceste șiruri fiind formate adăugând la cele de lungime $i-(r+1)$ un nou termen, repetat de $r+1$ ori. Așadar, recurența finală este $\mathrm{dp}[i] = 2 \cdot \mathrm{dp}[i-1] - \mathrm{dp}[i-r-1]$.

Problema 7. New Year and Permutation

Ideea de reținut din această problemă este că, în loc să numărăm secvențele respective pentru fiecare permutare în parte, putem număra pentru fiecare secvență care este numărul de permutări în care apare. Pentru o lungime fixată k, elementele secvenței pot fi alese în $n-k+1$ moduri, căci trebuie să formeze un segment compact peste $\langle 1, 2, \ldots, n\rangle$. Acum că am fixat conținutul secvenței, mai rămâne să permutăm atât elementele din secvență (în $k!$ moduri), cât și pe cele din exteriorul ei (în $(n-k)!$ moduri). Răspunsul se obține însumând $(n-k+1)! \cdot k!$ pentru fiecare k de la 1 la n.

Dificil

Problema 8. Kperms

Notăm cu $\mathrm{dp}[n][k]$ numărul de permutări ale mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ ce conțin k grupe. Gândim într-un mod similar cu cel de la numerele lui Stirling. Avem deja o permutare de ordin n ce conține k grupe. Ce putem obține inserând numărul $n+1$ în această permutare?

Ei bine, dacă $n+1$ este inserat imediat înaintea primului element al uneia dintre cele k grupe, observăm că numărul acestora nu se modifică. Însă, dacă îl inserăm pe oricare altă poziție, vom crea o nouă grupă, care începe cu $n+1$. Aceste observații se bazează pe faptul că $n+1$ este mai mare decât toate elementele din permutarea inițială, deci ordinea în care am ales să le inserăm a fost esențială. Obținem recurența $\mathrm{dp}[n][k] = (n-k+1) \cdot \mathrm{dp}[n-1][k-1] + k \cdot \mathrm{dp}[n-1][k]$.

Problema 9. Permutări

De data aceasta ar fi foarte complicat să gândim ca la numerele lui Stirling, însă putem gândi ca la numărul de partiții ale unui număr natural. Astfel, orice permutare de ordin n poate fi obținută pornind de la una de ordin $n-1$, incrementând fiecare element și inserându-l pe 1 undeva în noua permutare. Observăm că acest 1 poate fi un nou maxim doar dacă este inserat pe prima poziție. Așadar, recurența este $\mathrm{dp}[n][k] = \mathrm{dp}[n-1][k-1] + (n-1) \cdot \mathrm{dp}[n-1][k]$.

Problema 10. Gard2

Notăm cu $\mathrm{dp}[n][x]$ numărul de moduri de a plasa n muncitori (atenție, nu am spus *care* n — de exemplu, *primii* n) în x ture. Iterăm cu $m \in \{1, 2, \ldots, n-(x-1)\}$ numărul de muncitori din tura x. La fiecare pas, adunăm la $\mathrm{dp}[n][x]$ valoarea $C_n^m \cdot \mathrm{dp}[n-m][x-1]$, pentru că, după ce alegem acei muncitori într-unul dintre cele C_n^m moduri posibile, mai rămâne să plasăm în $x-1$ ture restul de $n-m$ muncitori. Răspunsul va fi $\mathrm{dp}[n][1] + \mathrm{dp}[n][2] + \cdots + \mathrm{dp}[n][n]$.

Problema 11. Pairs

Folosim principiul includerii și excluderii exact cum am prezentat în curs. Doar că aici numărul de numere divizibile cu o anumită valoare nu mai este la fel de ușor de aflat. Pentru fiecare element $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ va trebui să generăm fiecare submulțime a lui $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ și să lucrăm cu produsul numerelor din acea submulțime. Mai precis, să incrementăm sau să decrementăm elementul de pe poziția respectivă dintr-un vector de frecvență.

Problema 12. 100m

Partiționând mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ în k submulțimi, obținem k grupe de concurenți care ajung la finish în același timp. Însă, trebuie să asociem și o ordine acestor timpi, lucru care se poate face în $k!$ moduri. Răspunsul final se obține însumând $S(n, k) \cdot k!$ pentru fiecare k de la 1 la n.